0.1 Kan complex and Kan fibration

Definition 0.1.1

Simplicial complex K が Kan fibrant とは、任意の n 個の $(n-1)$-simplex

$$x_0, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n \in K_{n-1}$$

で、$d_i x_j = d_{j-1} x_i$、$(i < j, i, j \neq k)$ を満たすものに対し、n-simplex $x \in K_n$ が存在し、$d_i x = x_i$ を満たす。

Proposition 0.1.2

K が Kan complex であることと、任意 $n \geqq 0$ と、$0 \leqq k \leqq n$ に対し、

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\text{inclusion}"'] & K \\ \Delta^n \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

が lift を持つことは同値である。

proof)　K を Kan complex とする。このとき、任意 $n \geqq 0$ と、$0 \leqq k \leqq n$ に対し、$\alpha : \Lambda^n_k \longrightarrow K$ を考える。

$$\alpha_{n-1} : \Lambda^n_k(n-1) \longrightarrow K_{n-1}$$

$i_n \in \Delta^n(n) = \mathrm{Hom}_{SSet}([n],[n])$ に対し、$j \neq k$ に対し、$d_j(i_n) = l_j \in \Lambda^n_k(n-1)$ とすれば、$x_j = \alpha_{n-1}(l_j) \in K_{n-1}$ において、α が simplicial map であることと、simplicial condition により、$d_i x_j = d_{j-1} x_i$、$(i < j, i, j \neq k)$ である。このとき、Kan complex の定義から、$^\exists x \in K_n$ s.t $d_i x = x_i$ である。このとき、

$$\beta : \Delta^n \longrightarrow K$$

を、$\beta_n(i_n) = x$ から α の拡張として定義できる。

逆に、任意の simplicial map $\Lambda^n_k \longrightarrow K$ が Δ^n 上に拡張を持つとする。$x_0, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots x_n \in K_{n-1}$ に対し、$d_i x_j = d_{j-1} x_i$、$(i < j, i, j \neq k)$ とする。このとき、simplicial map

$$\alpha : \Lambda^n_k \longrightarrow K$$

が $\alpha(l_j) = x_j$ で定義できる。これより、この拡張 $\beta : \Delta^n \longrightarrow K$ が存在するが、$x = \beta_n(i_n) \in K_n$ とおけば、$d_i(x) = x_i$ を満たす。

□

Example 0.1.3

任意の空間 X に対し、singular simplicial set $S_*(X)$ は Kan fibrant である。

proof)　$f_0, \cdots, f_{k-1}, f_{k+1}, \cdots, f_n \in S_{n-1}(X)$ で、$d_i f_j = d_{j-1} f_i$、$(i < j, i, j \neq k)$ を満たすとする。

$$f_m : \Delta^{n-1} \longrightarrow X$$

であるが、$d_i f_j = d_{j-1} f_i$、$(i < j, i, j \neq k)$ の条件から、

$$\cup_{m\neq k} f_m : \cup_{m\neq k} \Delta^{n-1} = |\Lambda_k^n| \longrightarrow X$$

であるが、$|\Lambda_k^n| \subset \Delta^n$ であり、これは retract $\Delta^n \longrightarrow |\Lambda_k^n|$ があるので、この合成、$f : \Delta^n \longrightarrow X$ を考えれば、$d_i f = f_i$ となる。

□

Example 0.1.4

simplicial group G は Kan complex である。

proof) $x_0, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n \in G_{n-1}$ に対し、

1. $y_0 = s_0 x_0$
2. $y_i = y_{i-1}(s_i d_i y_{i-1})^{-1} s_i x_i \qquad 0 < i < k$
3. $y_n = y_{k-1}(s_{n-1} d_n y_{k-1})^{-1} s_{n-1} x_n$
4. $y_i = y_{i+1}(s_{i-1} d_i y_{i+1})^{-1} s_i x_i \qquad k < i < n$

という手順で、$y_{k+1} \in G_n$ を構成すれば、$d_i y_{k+1} = x_i$ となる。

□

最後に重要な Kan complex として groupoid の nerve というのを挙げる。残念ながらすべての、small category の nerve が Kan complex になっているわけではないのだが、似たような性質はもっている。

Proposition 0.1.5

C を small category としたとき、N_*C は、

$$\begin{tikzcd} \Lambda_k^n \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\text{inclusion}"'] & N_*C \\ \Delta[n] \arrow[ur, dotted, "\exists_1 \beta"'] & \end{tikzcd}$$

という任意の morphism の lift を $n \geqq 0$、$0 < k < n$ のとき一意的に持つ。

proof) $\alpha_0, \cdots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n \in N_{n-1}C$ を任意に取る。ただし、$k \neq 0, n$ とし、$d_i \alpha_j = d_{j-1} \alpha_i$ $(i < j, i, j \neq k)$ とする。このとき、

$$\alpha_j = (\alpha_j^1, \cdots, \alpha_j^{n-1})$$

と、composable な morphism の列で記述すると、$d_0(\alpha_n) = d_{n-1}(\alpha_0)$ であるので、

$$\alpha_n^2 = \alpha_0^1, \cdots, \alpha_n^{n-1} = \alpha_0^{n-2}$$

である。求めたい $\alpha \in N_n C$ は、$d_j \alpha = \alpha_j$ を満たすので、

$$\alpha = (\alpha^1, \cdots, \alpha^n)$$

とおけば、$d_0\alpha = \alpha_0$、$d_n\alpha = \alpha_n$ により、

$$\alpha = (\alpha_n^1, \cdots, \alpha_n^{n-1}, \alpha_0^{n-1})$$

とおけば、とりあえず、$d_n\alpha = \alpha_n$ となることはすぐに分かる。また、

$$d_{n-1}\alpha = d_{n-1}(\alpha_n^1, \cdots, \cdots, \alpha_n^{n-1}, \alpha_0^{n-1}) = (\alpha_n^1, \cdots, \alpha_n^{n-1}\alpha_0^{n-1}) = (\alpha_n^1, \cdots, \alpha_0^{n-2}\alpha_0^{n-1})$$

であり、$d_0\alpha_{n-1} = d_{n-2}\alpha_0$ と、$d_{n-1}\alpha_n = d_{n-1}\alpha_{n-1}$ を考えれば、上記が α_{n-1} を表していることが分かる。最後に、$j < n-1$ としたとき、

$$d_j\alpha = d_j(\alpha_n^1, \cdots, \cdots, \alpha_n^{n-1}, \alpha_0^{n-1}) = (d_j(\alpha_n^1, \cdots, \cdots, \alpha_n^{n-1}), \alpha_0^{n-1}) = (d_j\alpha_n, \alpha_0^{n-1}) = (d_{n-1}\alpha_j, \alpha_0^{n-1})$$

ところで、$d_0\alpha_j = \alpha_{j-1}\alpha_0$ より、最終項は一致しているため、$\alpha_j^{n-1} = \alpha_0^{n-1}$ ということで、上記は α_j を表している。また、一意性は明らかである。

$\square$

では groupoid においては、その他の範囲でも lift propaty を持つことを示す。注意としては groupoid でなくとも高次元、特に $n \geqq 4$ に対しては、$k = 0, n$ の場合でも lift propaty を持つ。これは、Λ_k^n と $\Delta[n]$ の 2 次元低い skelton を比較すると、一致しているということと、small category の degeneracy というのが、基本的には morphism の合成と cut によりできていて、その基軸となるのは 2 次元の nerve だからである。これ以上の次元の nerve でも基本的に 2 つずつの合成、あるいは first、last の morphism を cut する操作である。これを踏まえて、4 次以上であれば lift propaty を持つということが感覚的にはわかる。

Example 0.1.6

G を groupoid としたとき、N_*G は Kan complex である。

proof)　以下の場合に分けて、extension propaty を持つことを示す。

1. $n \geqq 0$、$k \neq 0, n$ のときは、Prop 0.1.5 により示される。また、$n \geqq 4$ のとき、$k = 0, n$ でも lift propaty を持つことを示す。$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in N_{n-1}G$ で、$d_i\alpha_j = d_{j-1}\alpha_i$ $(0 < i < j)$ とする。このとき、

$$\alpha_j = (\alpha_j^1, \cdots, \alpha_j^{n-1})$$

と、composable な morphism の列で記述すると、$d_1(\alpha_n) = d_{n-1}(\alpha_1)$ であるので、

$$\alpha_n^1\alpha_n^2 = \alpha_0^1, \alpha_n^3 = \alpha_0^2, \cdots, \alpha_n^{n-1} = \alpha_0^{n-2}$$

である。求めたい $\alpha \in N_n G$ は、$d_j\alpha = \alpha_j$ を満たすので、

$$\alpha = (\alpha^1, \cdots, \alpha^n)$$

とおけば、$d_1\alpha = \alpha_1$、$d_n\alpha = \alpha_n$ により、

$$\alpha = (\alpha_n^1, \cdots, \alpha_n^{n-1}, \alpha_1^{n-1})$$

とおけば、とりあえず、$d_n\alpha = \alpha_n$ となることはすぐに分かる。また、$d_1\alpha_n = d_{n-1}\alpha_1$ と $n \geqq 4$ から、$\alpha_n^{n-1} = \alpha_1^{n-1}$ であるので、

$$d_{n-1}\alpha = d_{n-1}(\alpha_n^1, \cdots, \alpha_n^{n-1}, \alpha_1^{n-1}) = (\alpha_n^1, \cdots, \alpha_n^{n-2}, \alpha_n^{n-1}\alpha_1^{n-1}) = (\alpha_n^1, \cdots, \alpha_n^{n-2}, \alpha_1^{n-2}\alpha_1^{n-1})$$

であり、$d_1\alpha_{n-1} = d_{n-2}\alpha_1$ と、$d_{n-1}\alpha_n = d_{n-1}\alpha_{n-1}$ を考えれば、上記が α_{n-1} を表していることが分かる。あとは、Prop 0.1.5 と同様である。

2. $n = 3$ のとき、$k = 0, 3$ に対し、extension propaty を持つことを示す。$k = 0$ のとき、

$$\alpha_1 = (\beta_1, \gamma_1), \alpha_2 = (\beta_2, \gamma_2), \alpha_3 = (\beta_3, \gamma_3) \in N_2G$$

に対し、$d_i\alpha_j = d_{j-1}\alpha_i$、$(0 < i < j)$ とする。$d_1\alpha_3 = d_2\alpha_1$ より、$\beta_3\gamma_3 = \beta_1$ であるので、

$$\alpha = (\beta_3, \gamma_3, \gamma_1) \in N_3G$$

とおけば、$d_3\alpha = \alpha_3, d_1\alpha = \alpha_1$ であることは明らかである。あとは、$d_2\alpha = (\beta_3, \gamma_3\gamma_1)$ を考えるが、

$$\beta_3 = d_2\alpha_3 = d_2\alpha_2 = \beta_2$$

であり、$\beta_2\gamma_2 = d_1\alpha_2 = d_1\alpha_1 = \beta_1\gamma_1$ よって、

$$\beta_3\gamma_3\gamma_1 = \beta_1\gamma_1 = \beta_2\gamma_2 = \beta_3\gamma_2$$

G は groupoid なので、β_3^{-1} が存在するので、$\gamma_3\gamma_1 = \gamma_2$ であり、$d_2\alpha = \alpha_2$ である。$k = 3$ である。

3. $n = 2$ のとき、$k = 0, 2$ に対し、extension propaty を持つことを示す。$k = 0$ のとき、$\alpha_1, \alpha_2 \in N_1G$ に対し、$d_1\alpha_2 = d_1\alpha_1$ とする。つまり、$s(\alpha_2) = s(\alpha_1)$ である。ここで、G が groupoid であるから、α_2^{-1} が存在するので、$\alpha = (\alpha_2, \alpha_2^{-1}\alpha_1) \in N_2G$ とすれば、$d_1\alpha = \alpha_1$、$d_2\alpha = \alpha_2$ である。$k = 2$ のときも同様である。

$\square$

Definition 0.1.7

Simplicial map $f : X \longrightarrow Y$ が Kan fibratinon であるとは、任意 $n \geqq 0$、$0 \leqq k \leqq n$ に対し可換図、

$$\begin{tikzcd} \Lambda_k^n \arrow[r] \arrow[d, "\text{inclusion}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \Delta[n] \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

が lift を持つことである。

Remark 0.1.8

K が Kan complex であることと、$K \longrightarrow *$ が Kan fibration であることは同値である。

Definition 0.1.9

$f : X \longrightarrow Y$ と、$v \in Y_0$ に対し、$\lim(* \xrightarrow{v} Y \xleftarrow{f} X)$ を f の v 上の fiber と呼ぶ。

Proposition 0.1.10

$f : X \longrightarrow Y$ を Kan fibration とする。このとき、

1. 任意の fiber は Kan complex である。
2. X が Kan complex ならば、Y もそうである。
3. Y が Kan complex で f が各次元で全射ならば、X も Kan complex である。

proof)　Kan fibration は lift propaty で定義されているので、composition と pull back で閉じているため示される。

□